Anwendungen der Computeralgebra in der Ölindustrie

Martin Kreuzer

Fachbereich Mathematik

Universität Dortmund

`martin.kreuzer@uni-dortmund.de`

Oberseminarvortrag

Universität GH Duisburg-Essen

13. Dezember 2006

Inhaltsübersicht

1 – Definition der Randbasen

Aller Anfang war die Erde wüst und leer.

Deshalb führten die Mathematiker einige **Definitionen** ein.

K Körper, $P = K[x_1, \ldots, x_n]$ Polynomring

$\mathbb{T}^n = \{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \geq 0\}$ Monoid der Terme

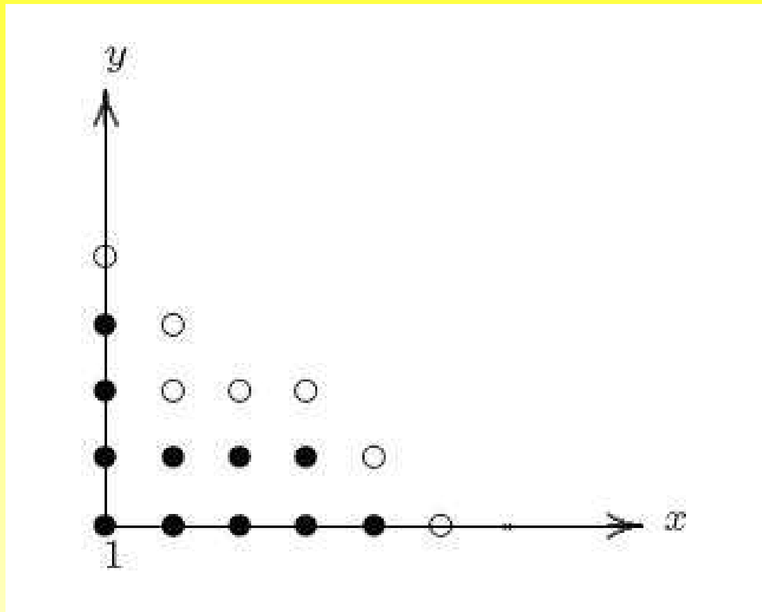
Definition 1.1 Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset \mathbb{T}^n$ heißt **Ordnungsideal** wenn für jeden Term in $\mathcal{O}$ auch alle seine Teiler in $\mathcal{O}$ liegen.

Ist $\mathcal{O}$ ein Ordnungsideal, so heißt die Menge

$$\partial\mathcal{O} = (x_1\,\mathcal{O} \cup \cdots \cup x_n\,\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}$$

der **Rand** von $\mathcal{O}$.

Beispiel eines Ordnungsideals mit Rand



• Term im Ordnungsideal ◦ Term im Rand

Sei $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\} \subseteq \mathbb{T}^n$ ein Ordnungsideal mit Rand $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$.

Definition 1.2 Eine Menge von Polynomen $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ heißt eine **$\mathcal{O}$-Randpräbasis**, wenn gilt:

$$g_j = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} c_{ij} t_i \qquad \text{mit } c_{ij} \in K$$

Eine $\mathcal{O}$-Randpräbasis G heißt **$\mathcal{O}$-Randbasis**, wenn die Restklassen der Elemente von $\mathcal{O}$ eine Vektorraumbasis von $P/\langle G \rangle$ darstellen.

Genau dann ist G eine $\mathcal{O}$-Randbasis wenn das Ideal $I = \langle G \rangle$ die Bedingung $I \oplus \langle \mathcal{O} \rangle_K = P$ erfüllt.

2 – Eigenschaften von Randbasen

1. **Randbasen verallgemeinern Gröbner-Basen:**

   Ist σ eine Termordnung und G die reduzierte σ-Gröbner-Basis eines 0-dimensionalen Polynomideals I, so kann man G zu einer Randbasis von I bzgl. $\mathcal{O}_\sigma(I) = \mathbb{T}^n \setminus \mathrm{LT}_\sigma(I)$ ergänzen.

2. Ein 0-dimensionales Polynomideal muss bzgl eines gegebenen Ordnungsideals $\mathcal{O}$ keine Randbasis besitzen. Falls es aber eine hat, so ist diese **eindeutig** bestimmt.

3. Man kann die Theorie der Randbasen in Analogie zur Theorie der Gröbner-Basen entwickeln. Es gibt auch einen **Randbasis-Algorithmus** zu ihrer Berechnung.

3 – Charakterisierung von Randbasen

Sei $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$ eine $\mathcal{O}$-Randpräbasis. Für $r \in \{1, \ldots, n\}$ definiere die r-te **formale Multiplikationsmatrix** $\mathcal{M}_r$ wie folgt:

Multipliziere $t_i \in \mathcal{O}$ mit x_r. Ist $x_r t_i = b_j$ im Rand von $\mathcal{O}$, so reduziere mit dem Randpräbasispolynom $g_j = b_j - \sum_{k=1}^{\mu} c_{kj} t_k$ und setze $(c_1, \ldots, c_\mu)$ in die i-te Spalte von $\mathcal{M}_r$. Ist aber $x_r t_i = t_j$ so setze den j-ten Einheitsvektor in die i-te Spalte von $\mathcal{M}_r$.

Theorem 3.1 *Genau dann ist G eine $\mathcal{O}$-Randbasis von $I = \langle G \rangle$, wenn die formalen Multiplikationsmatrizen paarweise kommutieren, d.h. wenn $\mathcal{M}_i \, \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j \, \mathcal{M}_i$ gilt für $1 \leq i < j \leq n$.*

4 – Die Randbasisvarietät

Sei $\mathcal{O} = \{t_1, \ldots, t_\mu\} \subseteq \mathbb{T}^n$ ein Ordnungsideal mit Rand $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \ldots, b_\nu\}$ und $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$ eine **$\mathcal{O}$-Randpräbasis**. Wir betrachten die Koeffizienten c_{ij} in der Darstellung $g_j = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} c_{ij} t_j$ als Unbestimmte.

Definition 4.1 Die Bedingungen $\mathcal{M}_i \, \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j \, \mathcal{M}_i$, also dass die formalen Multiplikationsmatrizen kommutieren, definieren ein Ideal $J \subset K[c_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n]$. Die Nullstellenmenge dieses Ideals heißt die **$\mathcal{O}$-Randbasisvarietät** $\mathcal{B}$.

Ziel: Zeige, dass man jede Randbasis mit Hilfe einer flachen Familie in ihr **Randtermideal** $\langle b_1, \ldots, b_\nu \rangle$ deformieren kann.

Satz 4.2 *(K – Robbiano)*
Sei $I = \langle G \rangle$ ein homogener vollständiger Durchschnitt, d.h. das Ideal I werde von n homogenen Polynomen erzeugt. Dann ist $\mathcal{B}$ eine rationale Varietät. Insbesondere ist $\mathcal{B}$ rational zusammenhängend, d.h. man kann jeden Punkt G mit dem Punkt 0 durch eine rationale Kurve verbinden.

Anwendung: Entspricht diese rationale Kurve einer flachen Familie, so kann man damit die Vermutung von Eisenbud-Green-Harris beweisen. Diese Vermutung besagt, dass die Nullstellen homogener vollständiger Durchschnitte eine gewisse **Uniformität** besitzen müssen.

5 – Approximative Verschwindungsideale

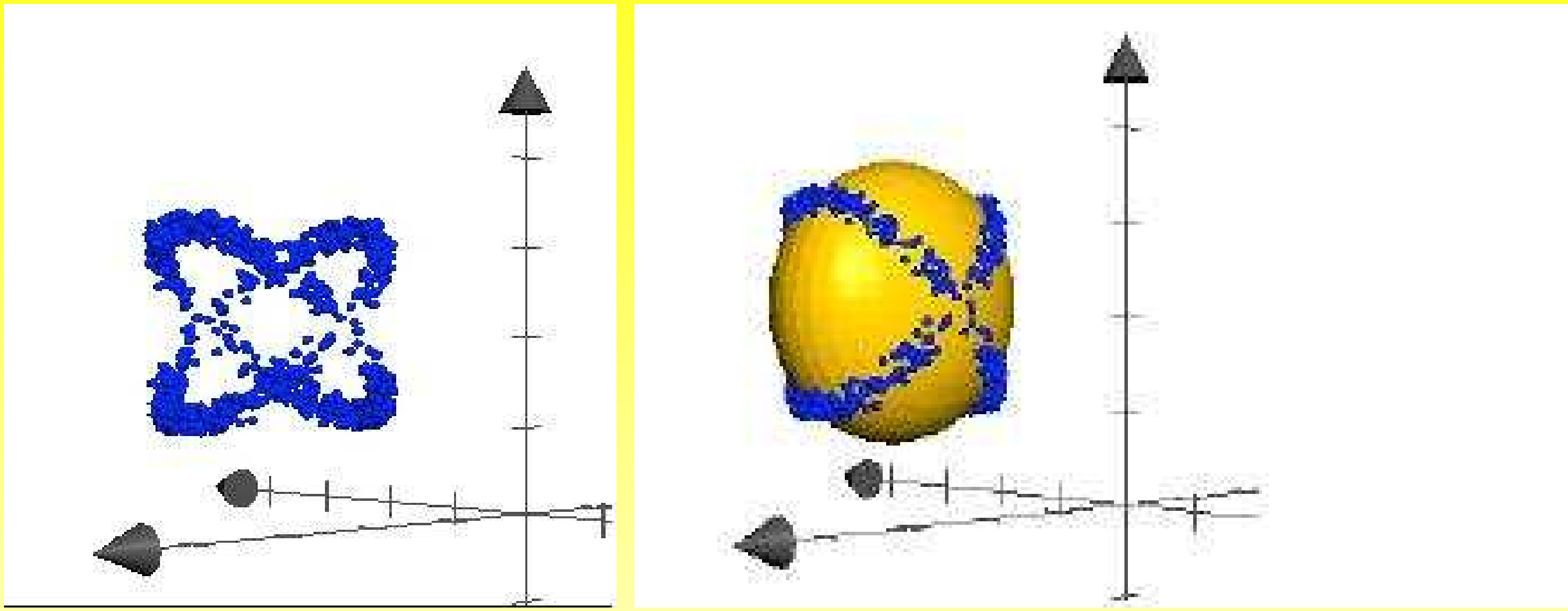
Gegeben seien approximative Datenpunkte $\mathbb{X} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}^n$. Gesucht seien polynomiale Gleichungen, die auf diesen Punkten **approximativ verschwinden**.

Definition 5.1 Sei $\varepsilon > 0$. Ein Ideal $I \subset P = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ heißt ein **ε-approximatives Verschwindungsideal** von $\mathbb{X}$ wenn es ein Erzeugendensystem G von I gibt mit

$$\|\mathrm{eval}(g)\| < \varepsilon \cdot \|g\| \qquad \text{für } g \in G$$

wobei $\|g\|$ die euklidische Norm des Koeffizientenvektors von g bezeichnet.

Beispiel 5.2 Sei $\mathbb{X}$ die folgende "Punktwolke" in der Nähe eines Ellipsoids:



Offenbar liegt die Gleichung des Ellipsoids im approximativen Verschwindungsideal.

Der Buchberger-Möller Algorithmus

berechnet das **exakte** Verschwindungsideal von $\mathbb{X}$ wie folgt:

1. Startend mit $L = \{1\}$, arbeite die Terme in L wie folgt ab bis $L = \emptyset$ gilt. Gib dann G aus.

2. Für $t = \min_\sigma(L)$, berechne den Evaluationsvektor $(t(p_1), \ldots, t(p_s))$ und reduziere ihn gegen die bereits berechneten Zeilen der Matrix $\mathcal{M} = (m_{ij})$. Erhalte

$$(v_1, \ldots, v_s) = (t(p_1), \ldots, t(p_s)) - \sum_i a_i (m_{i1}, \ldots, m_{is})$$

3. Ist $(v_1, \ldots, v_s) = 0$ so füge das korrespondierende Polynom $t - \sum_i a_i t_i$ zu G hinzu.

4. Ist $(v_1, \ldots, v_s) \neq 0$, so füge $(v_1, \ldots, v_s)$ als neue Zeile zu $\mathcal{M}$ hinzu und alle "neuen" Terme $x_i t$ zu L.

Der approximative BM-Algorithmus (ABM)

berechnet ein approximatives Verschwindungsideal von $\mathbb{X}$ mit Hilfe folgender Modifikation des BM-Algorithmus:

2. Arbeite alle Terme t_i vom nächsten Grad auf einmal ab. Bilde die Matrix der Evaluationsvektoren

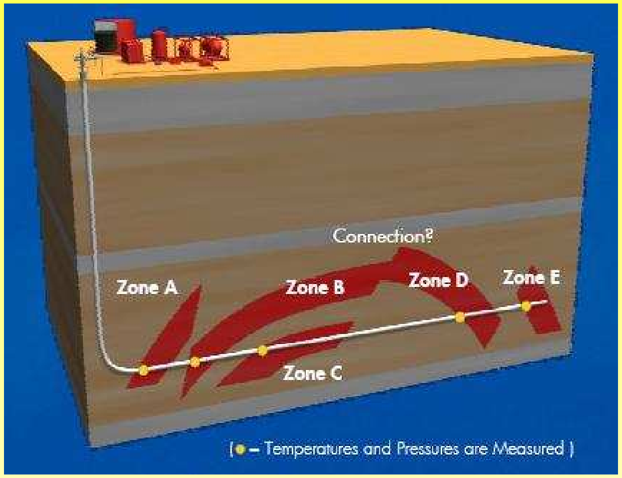
$$\mathcal{A} = (\mathrm{eval}(t_1), \ldots, \mathrm{eval}(t_\ell), \mathcal{M})$$

   und berechne ihre Singulärwertzerlegung. Bestimme damit eine Matrix $\mathcal{B}$ deren Spalten den **approximativen Kern** von $\mathcal{A}$ erzeugen. Bringe $\mathcal{B}$ in Zeilenstufenform und verwende ihre Zeilen für die Vektoren $(v_1, \ldots, v_s)$.

Man kann diesen Algorithmus so modifizieren, dass er eine **Randbasis** eines approximativen Verschwindungsideals berechnet.

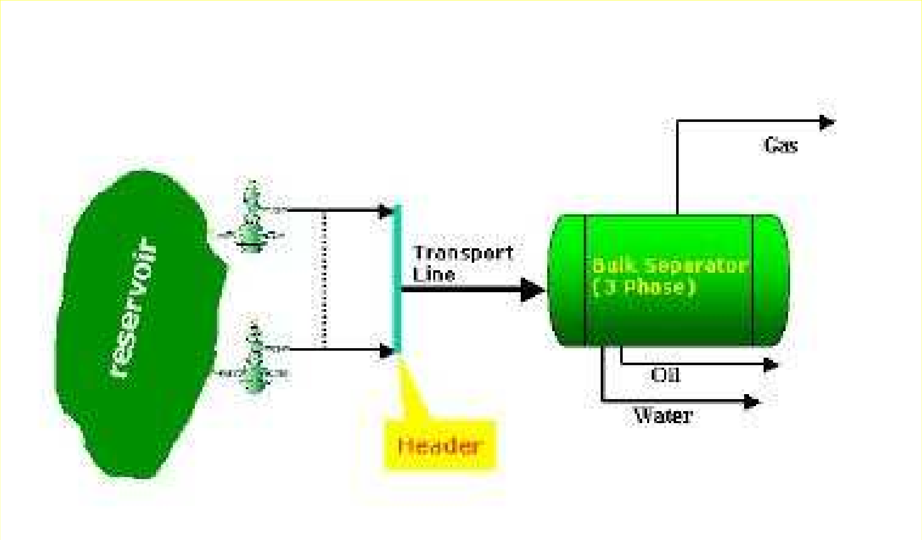
6 – Anwendung in der Ölindustrie

Schematische Darstellung eines Ölfelds



Drücke und Temperaturen können unterirdisch und an der Oberfläche gemessen werden. Die Interaktionen der verschiedenen “Taschen” sind unbekannt.

Im Testbetrieb kann man die Produktion einzelner Quellen messen.
In Normalbetrieb kennt man nur die Gesamtproduktion.

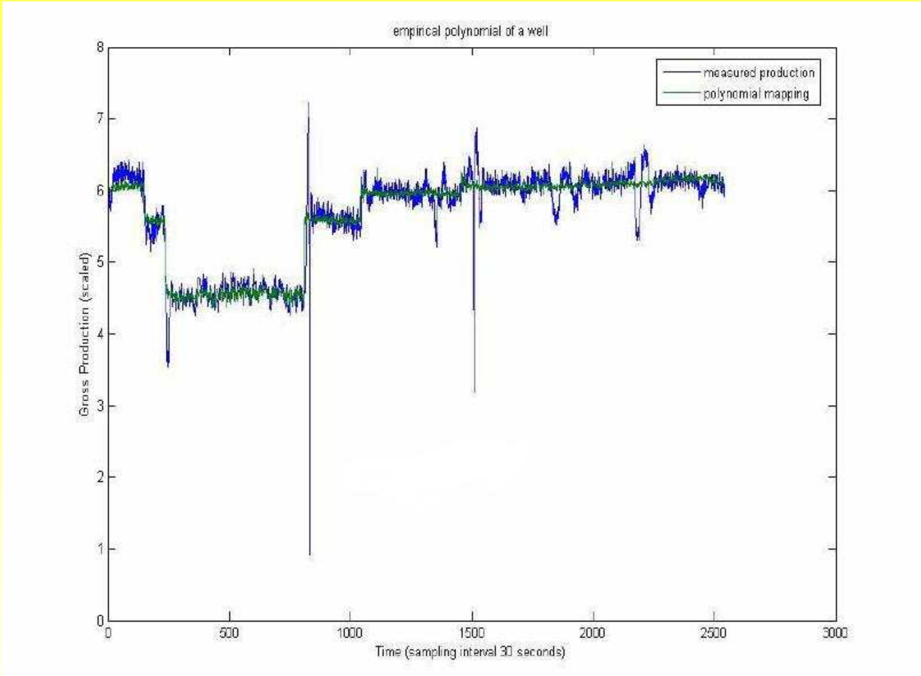


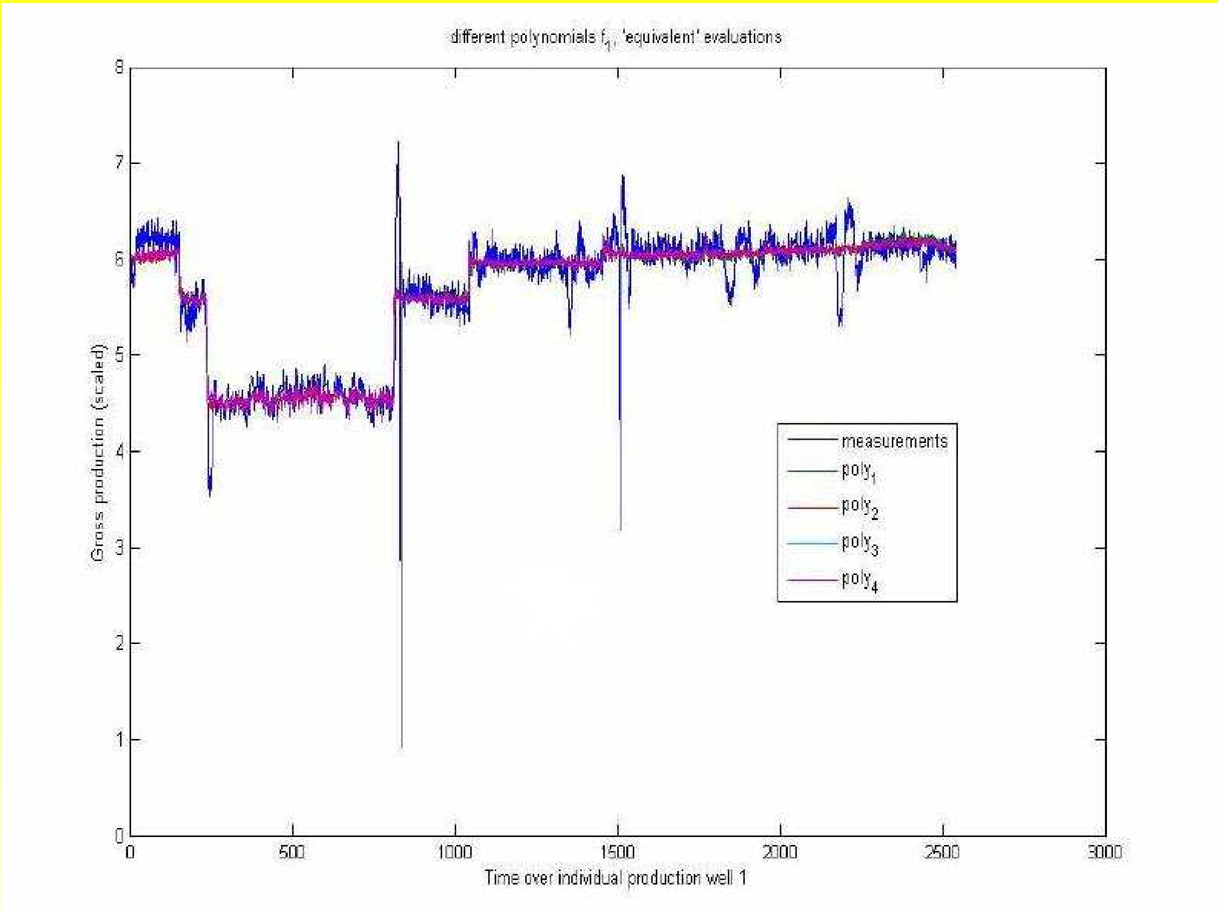
Der ABM-Algorithmus liefert polynomiale Modelle g_i für die einzelnen Quellen und die Gesamtproduktion g.

Eine approximative Randbasis des Ideals $\langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ liefert eine Darstellung

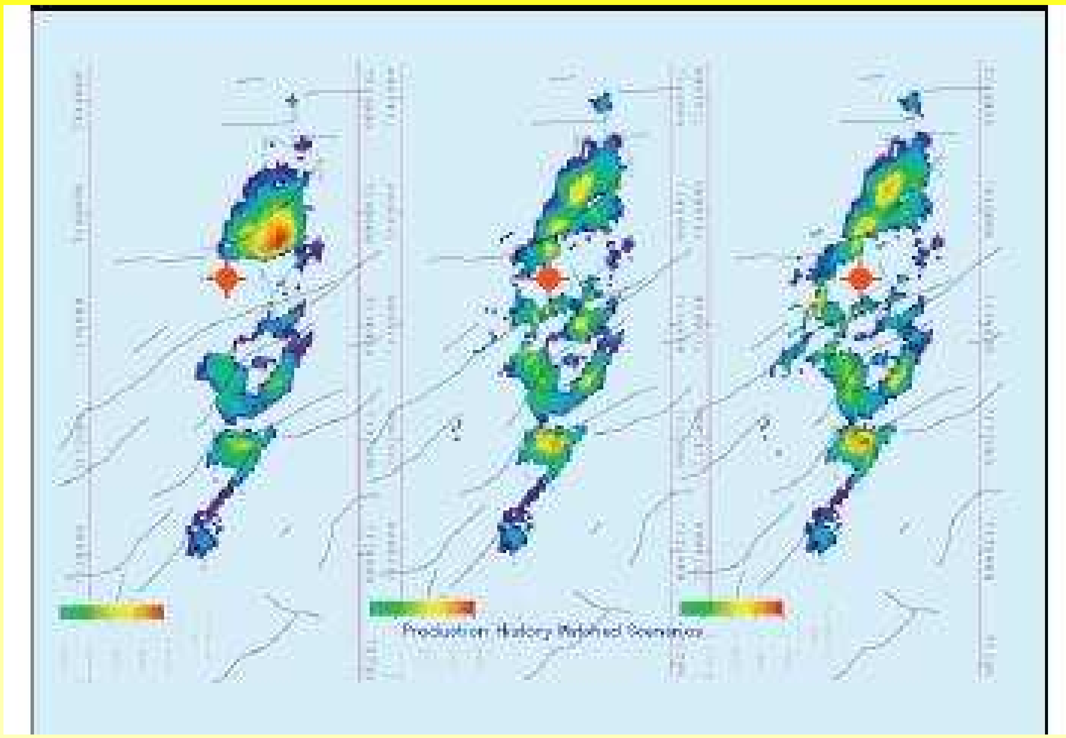
$$g = f_1\, g_1 + \cdots + f_s\, g_s$$

Die Polynome f_i geben Auskunft über die im Ölfeld vorhandenen **Interaktionen**.




different polynomials f_1, 'equivalent' evaluations
Gross production (scaled)
Time over individual production well 1
measurements
$poly_1$
$poly_2$
$poly_3$
$poly_4$
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

Veränderung eines Ölfelds im Laufe der Zeit



Es ist sehr wichtig, das Entstehen von **Dry Spots** zu verhindern. Mit den berechneten Interaktionen kann man die Gesamtproduktion vorhersagen und steuern. Dies erhöht die **Gesamtausbeute**.

7 – Referenzen

1. (mit A. Kehrein und L. Robbiano) *An algebraist's view on border bases*, in: Solving polynomial equations, Springer 2005, 169 – 202

2. (mit A. Kehrein) *Characterizations of border bases*, J. Pure Appl. Alg. **196** (2005), 251 – 270

3. (mit A. Kehrein) *Computing border bases*, J. Pure Appl. Alg. **205** (2006), 279 – 295

4. (mit L. Robbiano) *Deformations of border bases*, Preprint

5. (mit D. Heldt, S. Pokutta und H. Poulisse) *Approximate computation of zero-dimensional polynomial ideals*, Preprint

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

HUET = Helicopter Underwater Escape Training