# Kopfrechnen geht schneller als Du denkst!

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung “Rechnen oder rechnen lassen?”

Universität Passau, 21.12.2016

# Inhaltsübersicht

# Inhaltsübersicht

1 Das kleine Einmaleins

# Inhaltsübersicht

1. **Das kleine Einmaleins**
2. **Das große Einmaleins**

## Inhaltsübersicht


1. Das kleine Einmaleins
2. Das große Einmaleins
3. Quadrieren

# Inhaltsübersicht

1. Das kleine Einmaleins
2. Das große Einmaleins
3. Quadrieren
4. Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen

# Inhaltsübersicht


1. Das kleine Einmaleins
2. Das große Einmaleins
3. Quadrieren
4. Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen
5. Datumsrechnung

# Inhaltsübersicht

1. Das kleine Einmaleins
2. Das große Einmaleins
3. Quadrieren
4. Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen
5. Datumsrechnung
6. Rechenzauberei

# 1 Das kleine Einmaleins

**Sehr nützlich und schnell ist das Fingerrechnen**
**um etwas Sorgfalt zu zeigen**
**und maximale Rechenkraft abzuliefern.**
(Beda Venerabilis, 673-735 n.Chr.)

# 1 Das kleine Einmaleins

**Sehr nützlich und schnell ist das Fingerrechnen**
**um etwas Sorgfalt zu zeigen**
**und maximale Rechenkraft abzuliefern.**
(Beda Venerabilis, 673-735 n.Chr.)

Multipliziere zwei Zahlen zwischen 5 und 10 wie folgt:

# 1 Das kleine Einmaleins

**Sehr nützlich und schnell ist das Fingerrechnen**
**um etwas Sorgfalt zu zeigen**
**und maximale Rechenkraft abzuliefern.**
(Beda Venerabilis, 673-735 n.Chr.)

Multipliziere zwei Zahlen zwischen 5 und 10 wie folgt:

(1) Zähle an einer Hand von 10 rückwärts zur ersten Zahl.

# ① Das kleine Einmaleins

**Sehr nützlich und schnell ist das Fingerrechnen**
**um etwas Sorgfalt zu zeigen**
**und maximale Rechenkraft abzuliefern.**
(Beda Venerabilis, 673-735 n.Chr.)

Multipliziere zwei Zahlen zwischen 5 und 10 wie folgt:

(1) Zähle an einer Hand von 10 rückwärts zur ersten Zahl.

(2) Zähle an der anderen Hand von 10 rückwärts zur zweiten Zahl.

# 1 Das kleine Einmaleins

**Sehr nützlich und schnell ist das Fingerrechnen**
**um etwas Sorgfalt zu zeigen**
**und maximale Rechenkraft abzuliefern.**
(Beda Venerabilis, 673-735 n.Chr.)

Multipliziere zwei Zahlen zwischen 5 und 10 wie folgt:

(1) Zähle an einer Hand von 10 rückwärts zur ersten Zahl.

(2) Zähle an der anderen Hand von 10 rückwärts zur zweiten Zahl.

(3) Addiere die restlichen Finger und erhalte die Zehnerzahl.

# 1 Das kleine Einmaleins

**Sehr nützlich und schnell ist das Fingerrechnen**
**um etwas Sorgfalt zu zeigen**
**und maximale Rechenkraft abzuliefern.**
(Beda Venerabilis, 673-735 n.Chr.)

Multipliziere zwei Zahlen zwischen 5 und 10 wie folgt:

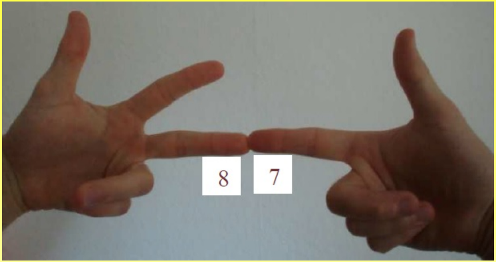
(1) Zähle an einer Hand von 10 rückwärts zur ersten Zahl.

(2) Zähle an der anderen Hand von 10 rückwärts zur zweiten Zahl.

(3) Addiere die restlichen Finger und erhalte die Zehnerzahl.

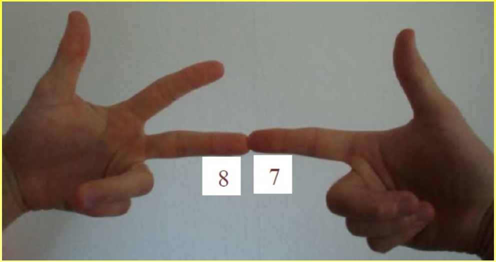
(4) Multipliziere die Zahlen der umgeknickten Finger und addiere das Resultat zur Zehnerzahl. Dies ist das Produkt.

**Beispiel:**




Zehnerzahl $3+2=5$, Einerzahl $2 \cdot 3 = 6$

**Beispiel:**




Zehnerzahl $3+2=5$, Einerzahl $2\cdot 3=6$

**Beweis:** Seien $x, y$ die Anzahlen der umgeknickten Finger. Dann gilt:

$$(10-x)\cdot(10-y) = 100-10x-10y+xy = 10\cdot[(5-x)+(5-y)]+xy$$

## 2 Das große Einmaleins

**Es lohnt sich, in der Schule aufzupassen,**
**denn die Mathematik lehrt,**
**dass man Nullen nicht übersehen darf.**
**Keine andere Erkenntnis macht sich**
**bei der Karriereplanung so bezahlt.**

(Karl-Heinz Karius)

# ② Das große Einmaleins

**Es lohnt sich, in der Schule aufzupassen,**
**denn die Mathematik lehrt,**
**dass man Nullen nicht übersehen darf.**
**Keine andere Erkenntnis macht sich**
**bei der Karriereplanung so bezahlt.**
(Karl-Heinz Karius)

Berechne das Produkt zweier Zahlen zwischen 10 und 20 wie folgt:

# ② Das große Einmaleins

**Es lohnt sich, in der Schule aufzupassen,**
**denn die Mathematik lehrt,**
**dass man Nullen nicht übersehen darf.**
**Keine andere Erkenntnis macht sich**
**bei der Karriereplanung so bezahlt.**
(Karl-Heinz Karius)

Berechne das Produkt zweier Zahlen zwischen 10 und 20 wie folgt:

**(1)** Addiere zur ersten Zahl die Einer der zweiten.

# ② Das große Einmaleins

**Es lohnt sich, in der Schule aufzupassen,**
**denn die Mathematik lehrt,**
**dass man Nullen nicht übersehen darf.**
**Keine andere Erkenntnis macht sich**
**bei der Karriereplanung so bezahlt.**
(Karl-Heinz Karius)

Berechne das Produkt zweier Zahlen zwischen 10 und 20 wie folgt:

**(1)** Addiere zur ersten Zahl die Einer der zweiten.

**(2)** Hänge eine Null an das Ergebnis an.

# 2 Das große Einmaleins

**Es lohnt sich, in der Schule aufzupassen,**
**denn die Mathematik lehrt,**
**dass man Nullen nicht übersehen darf.**
**Keine andere Erkenntnis macht sich**
**bei der Karriereplanung so bezahlt.**
(Karl-Heinz Karius)

Berechne das Produkt zweier Zahlen zwischen 10 und 20 wie folgt:

**(1)** Addiere zur ersten Zahl die Einer der zweiten.

**(2)** Hänge eine Null an das Ergebnis an.

**(3)** Nun addiere das Produkt der Einerziffern. Fertig!

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 2:** Wir berechnen $14 \cdot 19$ ebenso:

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 2:** Wir berechnen $14 \cdot 19$ ebenso:

**(1)** $14 + 9 = 23$

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 2:** Wir berechnen $14 \cdot 19$ ebenso:

**(1)** $14 + 9 = 23$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 230.

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 2:** Wir berechnen $14 \cdot 19$ ebenso:

**(1)** $14 + 9 = 23$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 230.

**(3)** Addiere $4 \cdot 9 = 36$ und erhalte **266**.

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 2:** Wir berechnen $14 \cdot 19$ ebenso:

**(1)** $14 + 9 = 23$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 230.

**(3)** Addiere $4 \cdot 9 = 36$ und erhalte **266**.

Das Zwischenergebnis wird im **Arbeitsgedächtnis** gespeichert.

Es hat nur eine Kapazität von **7 Informationseinheiten**.

**Beispiel 1:** Wir berechnen $13 \cdot 17$ mit dieser Methode:

**(1)** $13 + 7 = 20$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 200.

**(3)** Addiere $3 \cdot 7 = 21$ und erhalte **221**.

**Beispiel 2:** Wir berechnen $14 \cdot 19$ ebenso:

**(1)** $14 + 9 = 23$

**(2)** Eine Null anhängen ergibt 230.

**(3)** Addiere $4 \cdot 9 = 36$ und erhalte **266**.

Das Zwischenergebnis wird im **Arbeitsgedächtnis** gespeichert.

Es hat nur eine Kapazität von **7 Informationseinheiten**.

**Beweis der Methode:** Es gilt:

$$(10 + a) \cdot (10 + b) = 10\,(10 + a + b) + ab$$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \ = \ x^2 - y^2$$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \; = \; x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x+y)\cdot(x-y) \;=\; x^2-y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2-1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2-4$ etc.

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 =$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \;=\; x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$.

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \;=\; x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$.

Oder auch: $13 \cdot 17 =$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \; = \; x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$.

Oder auch: $13 \cdot 17 = 15^2 - 4 = 225 - 4 = 221$.

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \;=\; x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$.

Oder auch: $13 \cdot 17 = 15^2 - 4 = 225 - 4 = 221$.

**Zweiter Fall:** $(10a + b) \cdot (10a - b) = 100a^2 - b^2$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x+y)\cdot(x-y) \;=\; x^2-y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2-1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2-4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$.

Oder auch: $13 \cdot 17 = 15^2 - 4 = 225 - 4 = 221$.

**Zweiter Fall:** $(10a+b)\cdot(10a-b) = 100a^2 - b^2$

Zum Beispiel gilt $37 \cdot 43 =$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x+y)\cdot(x-y) \;=\; x^2-y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2-1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2-4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14\cdot 16 = 15^2-1 = 225-1 = 224$.

Oder auch: $13\cdot 17 = 15^2-4 = 225-4 = 221$.

**Zweiter Fall:** $(10a+b)\cdot(10a-b) = 100a^2-b^2$

Zum Beispiel gilt $37\cdot 43 = 40^2-3^2 = 1600-9 = 1591$.

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x+y)\cdot(x-y) \;=\; x^2-y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2-1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2-4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14\cdot 16 = 15^2-1 = 225-1 = 224$.

Oder auch: $13\cdot 17 = 15^2-4 = 225-4 = 221$.

**Zweiter Fall:** $(10a+b)\cdot(10a-b) = 100a^2-b^2$

Zum Beispiel gilt $37\cdot 43 = 40^2-3^2 = 1600-9 = 1591$.

Oder auch $75\cdot 85 =$

# Multiplizieren mit der dritten binomischen Formel

$$(x + y) \cdot (x - y) \; = \; x^2 - y^2$$

**Voraussetzung:** Wir wissen die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4, \ldots,$ $20^2 = 400$ auswendig. Sie müssen ins **Langzeitgedächtnis**.

**Erster Fall:** $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$ oder $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$ etc.

Zum Beispiel gilt $14 \cdot 16 = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$.

Oder auch: $13 \cdot 17 = 15^2 - 4 = 225 - 4 = 221$.

**Zweiter Fall:** $(10a + b) \cdot (10a - b) = 100a^2 - b^2$

Zum Beispiel gilt $37 \cdot 43 = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$.

Oder auch $75 \cdot 85 = 80^2 - 5^2 = 6400 - 25 = 6375$.

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

**Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal**

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

**Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal**

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

## Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $83 \cdot 96$.

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

## Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $83 \cdot 96$.

$$83 \quad \cdot \quad 96$$

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

## Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $83 \cdot 96$.

$$\begin{array}{ccc} 83 & \cdot & 96 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 17 & & 4 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 83 = 17$ und $100 - 96 = 4$

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

**Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal**

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $83 \cdot 96$.

$$\begin{array}{ccc} 83 & \cdot & 96 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 17 & & 4 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 83 = 17$ und $100 - 96 = 4$

**(2)** Kreuzweise: $96 - 17 = 83 - 4 = 79$

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

**Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal**

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $83 \cdot 96$.

$$\begin{array}{ccc} 83 & \cdot & 96 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 17 & \cdot & 4 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 83 = 17$ und $100 - 96 = 4$

**(2)** Kreuzweise: $96 - 17 = 83 - 4 = 79$

**(3)** Horizontal: $17 \cdot 4 = 68$

# Produkte von Zahlen bei einer Zehnerpotenz

## Erst vertikal, dann kreuzweise, dann horizontal

**Erster Fall:** Beide Zahlen sind knapp unter einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $83 \cdot 96$.

$$\begin{array}{ccc} 83 & \cdot & 96 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 17 & \cdot & 4 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 83 = 17$ und $100 - 96 = 4$

**(2)** Kreuzweise: $96 - 17 = 83 - 4 = 79$

**(3)** Horizontal: $17 \cdot 4 = 68$ Ergebnis: **7968**

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $107 \cdot 111$.

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $107 \cdot 111$.

$$107 \quad \cdot \quad 111$$

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $107 \cdot 111$.

$$\begin{array}{ccc} 107 & \cdot & 111 \\ \downarrow & & \downarrow \\ -7 & & -11 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 107 = -7$ und $100 - 111 = -11$

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $107 \cdot 111$.

$$\begin{array}{ccc} 107 & \cdot & 111 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ -7 & & -11 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 107 = -7$ und $100 - 111 = -11$

**(2)** Kreuzweise: $111 + 7 = 107 + 11 = 118$

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $107 \cdot 111$.

$$\begin{array}{ccc} 107 & \cdot & 111 \\ \downarrow & & \downarrow \\ -\,7 & \cdot & -\,11 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 107 = -7$ und $100 - 111 = -11$

**(2)** Kreuzweise: $111 + 7 = 107 + 11 = 118$

**(3)** Horizontal: $(-7) \cdot (-11) = 77$

**Zweiter Fall:** Beide Zahlen sind knapp über einer Zehnerpotenz.

Zum Beispiel berechnen wir $107 \cdot 111$.

$$\begin{array}{ccc} 107 & \cdot & 111 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ -\,7 & \cdot & -\,11 \end{array}$$

**(1)** Vertikal: $100 - 107 = -7$ und $100 - 111 = -11$

**(2)** Kreuzweise: $111 + 7 = 107 + 11 = 118$

**(3)** Horizontal: $(-7) \cdot (-11) = 77$

Ergebnis: **11877**

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$104 \quad \cdot \quad 87$$

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$\begin{array}{ccc} 104 & \cdot & 87 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ -\,4 & \cdot & 13 \end{array}$$

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$\begin{array}{ccc} 104 & \cdot & 87 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ -\,4 & \cdot & 13 \end{array}$$

Ergebnis: $\mathbf{9100 - 52 = 9048}$

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$\begin{array}{ccc} 104 & \cdot & 87 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ -4 & \cdot & 13 \end{array}$$

Ergebnis: $\mathbf{9100 - 52 = 9048}$

**Beweis der Methode:**

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$\begin{array}{ccc} 104 & \cdot & 87 \\ \downarrow & \times & \downarrow \\ -4 & \cdot & 13 \end{array}$$

Ergebnis: $\mathbf{9100 - 52 = 9048}$

**Beweis der Methode:**

$$(100 - a) \quad \cdot \quad (100 - b)$$

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$\begin{array}{ccc} 104 & \cdot & 87 \\ \downarrow & & \downarrow \\ -4 & \cdot & 13 \end{array}$$

Ergebnis: $\mathbf{9100 - 52 = 9048}$

**Beweis der Methode:**

$$\begin{array}{ccc} (100 - a) & \cdot & (100 - b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \cdot & b \end{array}$$

**Dritter Fall:** Die Zahlen sind über und unter einer Zehnerpotenz.

$$
\begin{array}{ccc}
104 & \cdot & 87 \\
\downarrow & & \downarrow \\
-\,4 & \cdot & 13
\end{array}
$$

Ergebnis: $\mathbf{9100 - 52 = 9048}$

**Beweis der Methode:**

$$
\begin{array}{ccc}
(100 - a) & \cdot & (100 - b) \\
\downarrow & & \downarrow \\
a & \cdot & b
\end{array}
$$

$$(100 - a) \cdot (100 - b) \; = \; 100\,(100 - a - b) + ab$$

# ③ Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

# ③ Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

# ③ Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 \;=\; x^2+2x+1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 \;=\; x^2-2x+1$$

**Beispiel 1:** $41^2 =$

# ③ Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**Beispiel 1:** $41^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681.$

# 3 Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**Beispiel 1:** $41^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681.$

**Beispiel 2:** $79^2 =$

# ③ Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**Beispiel 1:** $41^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681.$

**Beispiel 2:** $79^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 + 1 = 6400 - 160 + 1 = 6241.$

# 3 Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**Beispiel 1:** $41^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681.$

**Beispiel 2:** $79^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 + 1 = 6400 - 160 + 1 = 6241.$

**Beispiel 3:** $131^2 =$

# 3 Quadrieren

**In Mathe war ich immer gut,**
**bis sie anfingen, das Alphabet hineinzumischen.**

Der **Einsertrick** und der **Neunertrick** beruhen auf den ersten beiden **binomischen Formeln**

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

**Beispiel 1:** $41^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681.$

**Beispiel 2:** $79^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 + 1 = 6400 - 160 + 1 = 6241.$

**Beispiel 3:** $131^2 = 130^2 + 2 \cdot 130 + 1 = 16900 + 260 + 1 = 17161.$

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

## Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

**Beispiel 1:** $52^2 = (50{+}2)^2 =$

## Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

**Beispiel 1:** $52^2 = (50+2)^2 = 50^2+4\cdot 50+2^2 = 2500+200+4 = 2704$.

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

**Beispiel 1:** $52^2 = (50{+}2)^2 = 50^2{+}4{\cdot}50{+}2^2 = 2500{+}200{+}4 = 2704$.

**Beispiel 2:** $77^2 = (80{-}3)^2 =$

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

**Beispiel 1:** $52^2 = (50{+}2)^2 = 50^2{+}4{\cdot}50{+}2^2 = 2500{+}200{+}4 = 2704.$

**Beispiel 2:** $77^2 = (80{-}3)^2 = 80^3{-}6{\cdot}80{+}3^2 = 6400{-}480{+}9 = 5929.$

**Beispiel 3:** $138^2 = (140 - 2)^2 =$

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

**Beispiel 1:** $52^2 = (50{+}2)^2 = 50^2{+}4{\cdot}50{+}2^2 = 2500{+}200{+}4 = 2704$.

**Beispiel 2:** $77^2 = (80{-}3)^2 = 80^3{-}6{\cdot}80{+}3^2 = 6400{-}480{+}9 = 5929$.

**Beispiel 3:** $138^2 = (140 - 2)^2 = 100 \cdot 14^2 - 4 \cdot 140 + 4 = 19600 - 560 + 4 = 19044$.

# Quadrieren mit den binomischen Formeln

**(1)** Runde auf die nächste Zehnerzahl auf oder ab.

**(2)** Verwende die Formel $(10\,a \pm b)^2 = 100\,a^2 \pm 20ab + b^2$.

**Beispiel 1:** $52^2 = (50{+}2)^2 = 50^2{+}4{\cdot}50{+}2^2 = 2500{+}200{+}4 = 2704$.

**Beispiel 2:** $77^2 = (80{-}3)^2 = 80^3{-}6{\cdot}80{+}3^2 = 6400{-}480{+}9 = 5929$.

**Beispiel 3:** $138^2 = (140-2)^2 = 100 \cdot 14^2 - 4 \cdot 140 + 4 = 19600 - 560 + 4 = 19044$.

**Es werden zwei Speicherplätze im Arbeitsgedächtnis verwendet!**

# Die Fünferregel

# Die Fünferregel

**Multipliziere die Zahl vor der 5 mit der nächsten Zahl**

**und füge 25 an!**

# Die Fünferregel

**Multipliziere die Zahl vor der 5 mit der nächsten Zahl**

**und füge 25 an!**

**Beispiel 1:** $35^2 =$

# Die Fünferregel

**Multipliziere die Zahl vor der 5 mit der nächsten Zahl**

**und füge 25 an!**

**Beispiel 1:** $35^2 = 100 \cdot (3 \cdot 4) + 25 = 1225$.

# Die Fünferregel

**Multipliziere die Zahl vor der 5 mit der nächsten Zahl**

**und füge 25 an!**

**Beispiel 1:** $35^2 = 100 \cdot (3 \cdot 4) + 25 = 1225$.

**Beispiel 2:** $115^2 =$

# Die Fünferregel

**Multipliziere die Zahl vor der 5 mit der nächsten Zahl**

**und füge 25 an!**

**Beispiel 1:** $35^2 = 100 \cdot (3 \cdot 4) + 25 = 1225$.

**Beispiel 2:** $115^2 = 100\,(11 \cdot 12) + 25 = 100\,(121 + 11) + 25 = 13225$.

# Die Fünferregel

**Multipliziere die Zahl vor der 5 mit der nächsten Zahl**

**und füge 25 an!**

**Beispiel 1:** $35^2 = 100 \cdot (3 \cdot 4) + 25 = 1225$.

**Beispiel 2:** $115^2 = 100\,(11 \cdot 12) + 25 = 100\,(121 + 11) + 25 = 13225$.

**Beweis der Fünferregel:**

$$(10\,a + 5)^2 \;=\; 100\,a^2 + 100\,a + 25 \;=\; 100\,a(a+1) + 25$$

# 4 Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen

**Beim Miss Universe Wettbewerb wird geschummelt.**

# 4 Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen

**Beim Miss Universe Wettbewerb wird geschummelt.**
**Alle Gewinnerinnen sind von der Erde.**

# 4 Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen

**Beim Miss Universe Wettbewerb wird geschummelt.**
**Alle Gewinnerinnen sind von der Erde.**

## Der Satz von Vieta (1540-1603)

Die Lösungen $x_1, x_2$ der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ erfüllen $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 \cdot x_2 = b$.

# 4 Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen

**Beim Miss Universe Wettbewerb wird geschummelt.**
**Alle Gewinnerinnen sind von der Erde.**

## Der Satz von Vieta (1540-1603)

Die Lösungen $x_1, x_2$ der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ erfüllen $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 \cdot x_2 = b$.

**Beispiel 1:** Um die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ zu lösen, suchen wir zwei Zahlen $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = 4$ und $x_1 x_2 = 3$.

# 4 Quadratische Gleichungen und Wurzelziehen

**Beim Miss Universe Wettbewerb wird geschummelt.**
**Alle Gewinnerinnen sind von der Erde.**

## Der Satz von Vieta (1540-1603)

Die Lösungen $x_1, x_2$ der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ erfüllen $x_1 + x_2 = -a$ und $x_1 \cdot x_2 = b$.

**Beispiel 1:** Um die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ zu lösen, suchen wir zwei Zahlen $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = 4$ und $x_1 x_2 = 3$.
Diese Lösungen sind offenbar $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

**Beispiel 2:** Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 17x - 60 \;=\; 0$$

**Beispiel 2:** Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 17x - 60 \; = \; 0$$

Gesucht sind also $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = -17$ und $x_1 \cdot x_2 = -60$.

**Beispiel 2:** Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 17x - 60 \ = \ 0$$

Gesucht sind also $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = -17$ und $x_1 \cdot x_2 = -60$.
Die Lösungen sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = -20$.

**Beispiel 2:** Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 17x - 60 \;=\; 0$$

Gesucht sind also $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = -17$ und $x_1 \cdot x_2 = -60$.
Die Lösungen sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = -20$.

**Beispiel 3:** Zu einem vorgegebenen Parameter $a$ suchen wir die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 7a\,x + 12a^2 \;=\; 0$$

**Beispiel 2:** Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 17x - 60 \;=\; 0$$

Gesucht sind also $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = -17$ und $x_1 \cdot x_2 = -60$.
Die Lösungen sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = -20$.

**Beispiel 3:** Zu einem vorgegebenen Parameter $a$ suchen wir die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 7a\,x + 12a^2 \;=\; 0$$

Also brauchen wir $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = 7a$ und $x_1 \cdot x_2 = 12a^2$.

**Beispiel 2:** Wir suchen die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 17x - 60 \;=\; 0$$

Gesucht sind also $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = -17$ und $x_1 \cdot x_2 = -60$.
Die Lösungen sind also $x_1 = 3$ und $x_2 = -20$.

**Beispiel 3:** Zu einem vorgegebenen Parameter $a$ suchen wir die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 7a\,x + 12a^2 \;=\; 0$$

Also brauchen wir $x_1, x_2$ mit $x_1 + x_2 = 7a$ und $x_1 \cdot x_2 = 12a^2$.
Es ergibt sich $x_1 = 3a$ und $x_2 = 4a$.

# Die dritte Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl

# Die dritte Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl

Sofort nachdem die dritte Potenz einer 2-stelligen Zahl an die Tafel geschrieben wurde, kann man die dritte Wurzel ausrufen.

# Die dritte Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl

Sofort nachdem die dritte Potenz einer 2-stelligen Zahl an die Tafel geschrieben wurde, kann man die dritte Wurzel ausrufen.

Wenn zum Beispiel $x^3 = 117649$ vorgegeben ist, kann man sofort

# Die dritte Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl

Sofort nachdem die dritte Potenz einer 2-stelligen Zahl an die Tafel geschrieben wurde, kann man die dritte Wurzel ausrufen.

Wenn zum Beispiel $x^3 = 117649$ vorgegeben ist, kann man sofort $x = 49$ finden. Wie funktioniert dies?

# Die dritte Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl

Sofort nachdem die dritte Potenz einer 2-stelligen Zahl an die Tafel geschrieben wurde, kann man die dritte Wurzel ausrufen.

Wenn zum Beispiel $x^3 = 117649$ vorgegeben ist, kann man sofort $x = 49$ finden. Wie funktioniert dies?

**Erklärung:** Für eine 2-stellige Zahl $x = 10\,a + b$ gilt:

# Die dritte Wurzel aus einer 6-stelligen Zahl

Sofort nachdem die dritte Potenz einer 2-stelligen Zahl an die Tafel geschrieben wurde, kann man die dritte Wurzel ausrufen.
Wenn zum Beispiel $x^3 = 117649$ vorgegeben ist, kann man sofort $x = 49$ finden. Wie funktioniert dies?

**Erklärung:** Für eine 2-stellige Zahl $x = 10\,a + b$ gilt:

**(1)** $1000\,a^3 \leq x^3 < 1000\,(a+1)^3$

Aus der Tausenderzahl können wir also $a$ bestimmen:

| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a^3$ | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

**(2)** Für die Endziffer $b$ gilt $x^3 \equiv b^3 \pmod{10}$. Also können wir $b$ aus der folgenden Tabelle entnehmen:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^3 \pmod{10}$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Hier sind also nur $2 \leftrightarrow 8$ und $3 \leftrightarrow 7$ zu vertauschen!

**(2)** Für die Endziffer $b$ gilt $x^3 \equiv b^3 \pmod{10}$. Also können wir $b$ aus der folgenden Tabelle entnehmen:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^3 \pmod{10}$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Hier sind also nur $2 \leftrightarrow 8$ und $3 \leftrightarrow 7$ zu vertauschen!

**Beispiel 1:** Bestimme $\sqrt[3]{474552}$.

**(2)** Für die Endziffer $b$ gilt $x^3 \equiv b^3 \pmod{10}$. Also können wir $b$ aus der folgenden Tabelle entnehmen:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^3 \pmod{10}$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Hier sind also nur $2 \leftrightarrow 8$ und $3 \leftrightarrow 7$ zu vertauschen!

**Beispiel 1:** Bestimme $\sqrt[3]{474552}$.

**(1)** Wegen $7^3 = 343 < 474 < 512 = 8^3$ gilt $a = 7$.

**(2)** Wegen $2 \leftrightarrow 8$ gilt $b = 8$.

**(2)** Für die Endziffer $b$ gilt $x^3 \equiv b^3 \pmod{10}$. Also können wir $b$ aus der folgenden Tabelle entnehmen:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^3 \pmod{10}$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Hier sind also nur $2 \leftrightarrow 8$ und $3 \leftrightarrow 7$ zu vertauschen!

**Beispiel 1:** Bestimme $\sqrt[3]{474552}$.

**(1)** Wegen $7^3 = 343 < 474 < 512 = 8^3$ gilt $a = 7$.

**(2)** Wegen $2 \leftrightarrow 8$ gilt $b = 8$.

Also folgt $\sqrt[3]{474552} = 78$.

**(2)** Für die Endziffer $b$ gilt $x^3 \equiv b^3 \pmod{10}$. Also können wir $b$ aus der folgenden Tabelle entnehmen:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^3 \pmod{10}$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Hier sind also nur $2 \leftrightarrow 8$ und $3 \leftrightarrow 7$ zu vertauschen!

**Beispiel 1:** Bestimme $\sqrt[3]{474552}$.

**(1)** Wegen $7^3 = 343 < 474 < 512 = 8^3$ gilt $a = 7$.

**(2)** Wegen $2 \leftrightarrow 8$ gilt $b = 8$.

Also folgt $\sqrt[3]{474552} = 78$.

**Beispiel 2:** Bestimme $\sqrt[3]{884736}$.

**(2)** Für die Endziffer $b$ gilt $x^3 \equiv b^3 \pmod{10}$. Also können wir $b$ aus der folgenden Tabelle entnehmen:

| $b$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b^3 \pmod{10}$ | 0 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 9 |

Hier sind also nur $2 \leftrightarrow 8$ und $3 \leftrightarrow 7$ zu vertauschen!

**Beispiel 1:** Bestimme $\sqrt[3]{474552}$.

**(1)** Wegen $7^3 = 343 < 474 < 512 = 8^3$ gilt $a = 7$.

**(2)** Wegen $2 \leftrightarrow 8$ gilt $b = 8$.

Also folgt $\sqrt[3]{474552} = 78$.

**Beispiel 2:** Bestimme $\sqrt[3]{884736}$.

Wegen $9^3 = 729 < 884 < 1000$ und $6 \leftrightarrow 6$ gilt $\sqrt[3]{884736} = 96$.

# 5 Datumsrechnung

**Hast Du wirklich Dein ganzes Leben in diesem Dorf gelebt?**

# 5 Datumsrechnung

**Hast Du wirklich Dein ganzes Leben in diesem Dorf gelebt?**

**Noch nicht.**

# 5 Datumsrechnung

**Hast Du wirklich Dein ganzes Leben in diesem Dorf gelebt?**

**Noch nicht.**

## Freitag, der 13.

**Paraskave-dekatria-phobie:**

# 5 Datumsrechnung

**Hast Du wirklich Dein ganzes Leben in diesem Dorf gelebt?**

**Noch nicht.**

## Freitag, der 13.

**Paraskave-dekatria-phobie:** Angst vor dem Freitag, den 13. (med.)

**Frage:** Wie viele ,,Freitag, der 13.'' gibt es in einem Jahr?

# 5 Datumsrechnung

**Hast Du wirklich Dein ganzes Leben in diesem Dorf gelebt?**

**Noch nicht.**

## Freitag, der 13.

**Paraskave-dekatria-phobie:** Angst vor dem Freitag, den 13. (med.)

**Frage:** Wie viele ,,Freitag, der 13.'' gibt es in einem Jahr?

**Antwort:** Jedes Jahr gibt es ein bis drei Freitage, den 13.
Um zu berechnen, wie viele es sind, brauchen wir den Wert des Wochentags des 1. Januar nach folgender Tabelle:

# Wochentagswerte

| So | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

# Wochentagswerte

| So | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Nun brauchen wir noch die Anzahl der Tage **T** vom 1.1. bis zum 13. eines Monats. Genauer gesagt genügt **$\bar{T}$=T (mod 7)**. In einem Schaltjahr ist die Anzahl **$\bar{T}$S** etwas anders.

| | Jan | Feb | Mär | Apr | Mai | Jun | Jul | Aug | Sep | Okt | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **T** | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| **$\bar{T}$** | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| **$\bar{T}$S** | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

# Wochentagswerte

| So | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Nun brauchen wir noch die Anzahl der Tage **T** vom 1.1. bis zum 13. eines Monats. Genauer gesagt genügt **$\bar{T}$=T (mod 7)**. In einem Schaltjahr ist die Anzahl **$\bar{T}$S** etwas anders.

| | Jan | Feb | Mär | Apr | Mai | Jun | Jul | Aug | Sep | Okt | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **T** | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| **$\bar{T}$** | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| **$\bar{T}$S** | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

Um die Freitage, den 13. zu erhalten, muss man nur den Wochentagswert des 1.1. (mod 7) addieren und schauen, wann 5 herauskommt.

| | Jan | Feb | Mär | Apr | Mai | Jun | Jul | Aug | Sep | Okt | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{\mathbf{T}}$ | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| $\bar{\mathbf{T}}\mathbf{S}$ | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

| | Jan | Feb | Mär | Apr | Mai | Jun | Jul | Aug | Sep | Okt | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{\mathsf{T}}$ | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| $\bar{\mathsf{T}}\mathsf{S}$ | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

**Beispiel 1:** Im Jahr 2017 ist der 1.1. ein Sonntag (Wochentagswert $\bar{\mathsf{W}} = 0$). Also ist $\bar{\mathsf{W}} + \bar{\mathsf{T}}$ genau im Januar und im Oktober gleich 5, d.h. wir haben

Freitag, den **13.1.2017** und Freitag, den **13.10.2017.**

| | Jan | Feb | Mär | Apr | Mai | Jun | Jul | Aug | Sep | Okt | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{\mathsf{T}}$ | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| $\bar{\mathsf{T}}$S | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

**Beispiel 1:** Im Jahr 2017 ist der 1.1. ein Sonntag (Wochentagswert $\bar{W} = 0$). Also ist $\bar{W} + \bar{T}$ genau im Januar und im Oktober gleich 5, d.h. wir haben

Freitag, den **13.1.2017** und Freitag, den **13.10.2017.**

**Beispiel 2:** Der 1.1.2018 ist ein Montag ($\bar{W}=1$). Demnach sind der **13.4.2018** und der **13.7.2018** Freitage, der 13.

| | Jan | Feb | Mär | Apr | Mai | Jun | Jul | Aug | Sep | Okt | Nov | Dez |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{T}$ | 5 | 1 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 | 0 | 3 | 5 | 1 | 3 |
| $\bar{T}S$ | 5 | 1 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 | 1 | 4 | 6 | 2 | 4 |

**Beispiel 1:** Im Jahr 2017 ist der 1.1. ein Sonntag (Wochentagswert $\bar{W} = 0$). Also ist $\bar{W} + \bar{T}$ genau im Januar und im Oktober gleich 5, d.h. wir haben

Freitag, den **13.1.2017** und Freitag, den **13.10.2017.**

**Beispiel 2:** Der 1.1.2018 ist ein Montag ($\bar{W}$=1). Demnach sind der **13.4.2018** und der **13.7.2018** Freitage, der 13.

**Beispiel 3:** Der 1.1.2019 ist ein Dienstag ($\bar{W}$=2). Demnach sind der **13.9.2019** und der **13.12.2019** Freitage, der 13.

# Wochentagsberechnung

# Wochentagsberechnung

$$W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor + y + \lfloor \tfrac{y}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{c}{4} \rfloor - 2c \pmod 7$$

$d$ = Tagesdatum (1 – 31)

$m$ = Monatsnummer mit März=1, ..., Jan =11, Feb = 12

$y$ = letzte zwei Stellen der Jahreszahl $J$ (bzw. $J - 1$ bei Jan, Feb)

$c$ = erste zwei Stellen der Jahreszahl $J$ (bzw. $J - 1$ bei Jan, Feb)

# Wochentagsberechnung

$$W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor + y + \lfloor \tfrac{y}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{c}{4} \rfloor - 2c \pmod 7$$

$d =$ Tagesdatum (1 – 31)

$m =$ Monatsnummer mit März=1, ..., Jan =11, Feb = 12

$y =$ letzte zwei Stellen der Jahreszahl $J$ (bzw. $J - 1$ bei Jan, Feb)

$c =$ erste zwei Stellen der Jahreszahl $J$ (bzw. $J - 1$ bei Jan, Feb)

**Beweis der Formel:** siehe **Wikipedia**.

# Wochentagsberechnung

$$W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor + y + \lfloor \tfrac{y}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{c}{4} \rfloor - 2c \pmod 7$$

$d$ = Tagesdatum (1 – 31)

$m$ = Monatsnummer mit März=1, ..., Jan =11, Feb = 12

$y$ = letzte zwei Stellen der Jahreszahl $J$ (bzw. $J - 1$ bei Jan, Feb)

$c$ = erste zwei Stellen der Jahreszahl $J$ (bzw. $J - 1$ bei Jan, Feb)

**Beweis der Formel:** siehe **Wikipedia**.

**Beispiel 1:** Im Jahr 2017 gilt ab März $y + \lfloor \frac{y}{4} \rfloor + \lfloor \frac{c}{4} \rfloor - 2c \equiv 17 + 4 + 5 - 40 \equiv 0 \pmod 7$. Also ist der Wochentag des 1. Mai ($d = 1$, $m = 3$) z.B. $W = 1 + \lfloor 2,6 \cdot 3 - 0,2 \rfloor = 8 \equiv 1 \pmod 7$, d.h. der 1. Mai 2017 ist ein **Montag**.

**Beispiel 2:** Der 3. Oktober 2017 liefert $W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 2,6 \cdot 8 - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 20,6 \rfloor \equiv 2 \pmod 7$. Somit ist dies ein **Dienstag**.

**Beispiel 2:** Der 3. Oktober 2017 liefert $W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 2,6 \cdot 8 - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 20,6 \rfloor \equiv 2 \pmod 7$. Somit ist dies ein **Dienstag**.

**Beispiel 3:** Der Wochentag des 1.1.2000 erfordert ein wenig Konzentration. In diesem Fall ist $y = 99$ und $c = 19$. Ebenso gilt $d = 1$ und $m = 11$. Die Formel liefert

$$W = 1 + \lfloor 2,6 \cdot 11 - 0,2 \rfloor + 99 + \lfloor \tfrac{99}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{19}{4} \rfloor - 2 \cdot 19 = 118 \equiv 6 \pmod 7$$

**Beispiel 2:** Der 3. Oktober 2017 liefert $W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 2,6 \cdot 8 - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 20,6 \rfloor \equiv 2 \pmod 7$. Somit ist dies ein **Dienstag**.

**Beispiel 3:** Der Wochentag des 1.1.2000 erfordert ein wenig Konzentration. In diesem Fall ist $y = 99$ und $c = 19$. Ebenso gilt $d = 1$ und $m = 11$. Die Formel liefert

$$W = 1 + \lfloor 2,6 \cdot 11 - 0,2 \rfloor + 99 + \lfloor \tfrac{99}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{19}{4} \rfloor - 2 \cdot 19 = 118 \equiv 6 \pmod 7$$

Der 1.1.2000 war also ein **Samstag**.

**Beispiel 2:** Der 3. Oktober 2017 liefert $W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 2,6 \cdot 8 - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 20,6 \rfloor \equiv 2 \pmod 7$. Somit ist dies ein **Dienstag**.

**Beispiel 3:** Der Wochentag des 1.1.2000 erfordert ein wenig Konzentration. In diesem Fall ist $y = 99$ und $c = 19$. Ebenso gilt $d = 1$ und $m = 11$. Die Formel liefert

$$W = 1 + \lfloor 2,6 \cdot 11 - 0,2 \rfloor + 99 + \lfloor \tfrac{99}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{19}{4} \rfloor - 2 \cdot 19 = 118 \equiv 6 \pmod 7$$

Der 1.1.2000 war also ein **Samstag**.

Das **Kalenderrechnen** ist eine der Disziplinen bei der alle zwei Jahre stattfindenden **Weltmeisterschaft im Kopfrechen**.

**Beispiel 2:** Der 3. Oktober 2017 liefert $W = d + \lfloor 2,6 \cdot m - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 2,6 \cdot 8 - 0,2 \rfloor = 3 + \lfloor 20,6 \rfloor \equiv 2 \pmod 7$. Somit ist dies ein **Dienstag**.

**Beispiel 3:** Der Wochentag des 1.1.2000 erfordert ein wenig Konzentration. In diesem Fall ist $y = 99$ und $c = 19$. Ebenso gilt $d = 1$ und $m = 11$. Die Formel liefert

$$W = 1 + \lfloor 2,6 \cdot 11 - 0,2 \rfloor + 99 + \lfloor \tfrac{99}{4} \rfloor + \lfloor \tfrac{19}{4} \rfloor - 2 \cdot 19 = 118 \equiv 6 \pmod 7$$

Der 1.1.2000 war also ein **Samstag**.

Das **Kalenderrechnen** ist eine der Disziplinen bei der alle zwei Jahre stattfindenden **Weltmeisterschaft im Kopfrechen**.

Der Weltrekord von **125** Kalenderrechnungen in einer Minute wurde am 11.9.2016 durch **Jay Baldiya Jain** aus Indien aufgestellt.

# 6 Rechenzauberei

**Jede genügend weit fortgeschrittene Technologie ist ununterscheidbar von Zauberei.**

**(Arthur C. Clarke)**

# 6 Rechenzauberei

**Jede genügend weit fortgeschrittene Technologie**
**ist ununterscheidbar von Zauberei.**
**(Arthur C. Clarke)**

## Die große Fibonacci-Summe

# 6 Rechenzauberei

**Jede genügend weit fortgeschrittene Technologie**
**ist ununterscheidbar von Zauberei.**
**(Arthur C. Clarke)**

## Die große Fibonacci-Summe

Startend mit zwei beliebigen (nicht zu großen) natürlichen Zahlen bilden wir eine 10 Zahlen lange Fibonacci-Reihe, z.B.

**4, 7,** 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322

# 6 Rechenzauberei

**Jede genügend weit fortgeschrittene Technologie**
**ist ununterscheidbar von Zauberei.**
**(Arthur C. Clarke)**

## Die große Fibonacci-Summe

Startend mit zwei beliebigen (nicht zu großen) natürlichen Zahlen bilden wir eine 10 Zahlen lange Fibonacci-Reihe, z.B.

**4, 7,** 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322

Der Zauberer addiert die Zahlen in Windeseile und erhält

# 6 Rechenzauberei

**Jede genügend weit fortgeschrittene Technologie**
**ist ununterscheidbar von Zauberei.**
**(Arthur C. Clarke)**

## Die große Fibonacci-Summe

Startend mit zwei beliebigen (nicht zu großen) natürlichen Zahlen bilden wir eine 10 Zahlen lange Fibonacci-Reihe, z.B.

**4, 7,** 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322

Der Zauberer addiert die Zahlen in Windeseile und erhält **836**.

## Die Auflösung

## Die Auflösung

Der Mathezauberer muss nur die **7. Zahl mal 11** nehmen. Einen Trick für schnelles Multiplizieren mit 11 lernen wir in den Übungen.

## Die Auflösung

Der Mathezauberer muss nur die **7. Zahl mal 11** nehmen. Einen Trick für schnelles Multiplizieren mit 11 lernen wir in den Übungen.

Im Beispiel war also nur $11 \cdot 76 = 836$ zu rechnen.

## Die Auflösung

Der Mathezauberer muss nur die **7. Zahl mal 11** nehmen. Einen Trick für schnelles Multiplizieren mit 11 lernen wir in den Übungen.

Im Beispiel war also nur $11 \cdot 76 = 836$ zu rechnen.

**Beweis:** Seien $a, b$ die Anfangszahlen. Dann lautet die Kette

$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, 8a+13b, 13a+21b, 21a+34b$

und die Summe ist $55a+88b = 11\cdot(5a+8b)$, also genau das 11-fache der 7. Zahl.

# Das Multiplikationswunder

Die Zuschauer bestimmen zwei zufällig gewählte 5-stellige Zahlen. Ein Zuschauer berechnet (z.B. mit Hilfe eines Taschenrechners) das Produkt und schreibt es an die Tafel. Danach wird eine von Null verschiedene Ziffer ausgewischt. Der Mathezauberer, der das Produkt nicht gesehen hat, kann sie sofort wieder einsetzen.

# Das Multiplikationswunder

Die Zuschauer bestimmen zwei zufällig gewählte 5-stellige Zahlen. Ein Zuschauer berechnet (z.B. mit Hilfe eines Taschenrechners) das Produkt und schreibt es an die Tafel. Danach wird eine von Null verschiedene Ziffer ausgewischt. Der Mathezauberer, der das Produkt nicht gesehen hat, kann sie sofort wieder einsetzen.

**Beispiel 1:**

$$83544 \cdot 72345 = 6\,04\_\,990\,680$$

# Das Multiplikationswunder

Die Zuschauer bestimmen zwei zufällig gewählte 5-stellige Zahlen. Ein Zuschauer berechnet (z.B. mit Hilfe eines Taschenrechners) das Produkt und schreibt es an die Tafel. Danach wird eine von Null verschiedene Ziffer ausgewischt. Der Mathezauberer, der das Produkt nicht gesehen hat, kann sie sofort wieder einsetzen.

**Beispiel 1:**

$$83544 \cdot 72345 = 6\,04\underline{\mathbf{3}}\,990\,680$$

# Das Multiplikationswunder

Die Zuschauer bestimmen zwei zufällig gewählte 5-stellige Zahlen. Ein Zuschauer berechnet (z.B. mit Hilfe eines Taschenrechners) das Produkt und schreibt es an die Tafel. Danach wird eine von Null verschiedene Ziffer ausgewischt. Der Mathezauberer, der das Produkt nicht gesehen hat, kann sie sofort wieder einsetzen.

**Beispiel 1:**

$$83544 \cdot 72345 = 6\,04\underline{\mathbf{3}}\,990\,680$$

**Beispiel 2:**

$$76249 \cdot 30162 = 2\,299\,\underline{\ \ }22\,338$$

# Das Multiplikationswunder

Die Zuschauer bestimmen zwei zufällig gewählte 5-stellige Zahlen. Ein Zuschauer berechnet (z.B. mit Hilfe eines Taschenrechners) das Produkt und schreibt es an die Tafel. Danach wird eine von Null verschiedene Ziffer ausgewischt. Der Mathezauberer, der das Produkt nicht gesehen hat, kann sie sofort wieder einsetzen.

**Beispiel 1:**

$$83544 \cdot 72345 = 6\,04\underline{\mathbf{3}}\,990\,680$$

**Beispiel 2:**

$$76249 \cdot 30162 = 2\,299\,\underline{\mathbf{8}}22\,338$$

# Auflösung

Da die Ziffer $\mathbf{0}$ nicht ausgewischt werden darf, ist die fehlende Ziffer durch den Neunerrest der Zahl eindeutig bestimmt.

# Auflösung

Da die Ziffer **0** nicht ausgewischt werden darf, ist die fehlende Ziffer durch den Neunerrest der Zahl eindeutig bestimmt.

Der Mathezauberer bestimmt die Neunerreste der beiden Faktoren und multipliziert sie modulo 9.

## Auflösung

Da die Ziffer **0** nicht ausgewischt werden darf, ist die fehlende Ziffer durch den Neunerrest der Zahl eindeutig bestimmt.

Der Mathezauberer bestimmt die Neunerreste der beiden Faktoren und multipliziert sie modulo 9.

Wenn er das Teilergebnis sieht, bestimmt er dessen Neunerrest. Die fehlende Ziffer muss den Neunerrest korrekt ergänzen.

# Auflösung

Da die Ziffer **0** nicht ausgewischt werden darf, ist die fehlende Ziffer durch den Neunerrest der Zahl eindeutig bestimmt.

Der Mathezauberer bestimmt die Neunerreste der beiden Faktoren und multipliziert sie modulo 9.

Wenn er das Teilergebnis sieht, bestimmt er dessen Neunerrest. Die fehlende Ziffer muss den Neunerrest korrekt ergänzen.

**Beispiel:** Im zweiten Beispiel gilt $76249 \equiv 1 \pmod 9$ und $30162 \equiv 3 \pmod 9$. Das Produkt ist daher $1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod 9$.

# Auflösung

Da die Ziffer **0** nicht ausgewischt werden darf, ist die fehlende Ziffer durch den Neunerrest der Zahl eindeutig bestimmt.

Der Mathezauberer bestimmt die Neunerreste der beiden Faktoren und multipliziert sie modulo 9.

Wenn er das Teilergebnis sieht, bestimmt er dessen Neunerrest. Die fehlende Ziffer muss den Neunerrest korrekt ergänzen.

**Beispiel:** Im zweiten Beispiel gilt $76249 \equiv 1 \pmod 9$ und $30162 \equiv 3 \pmod 9$. Das Produkt ist daher $1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod 9$.

Der Neunerrest von 2 299 022 338 ist 4 und wird durch **8** zu 3 ergänzt.

# THE END

# THE END

**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**

**Alle Probleme, denen die USA heutzutage gegenüberstehen, verdanken wir einer verfehlten Einwanderungspolitik der Indianer.**